Corrigé de *Mathématiques*

$\mathcal{BEPC}$ – 2015

Activités numériques.

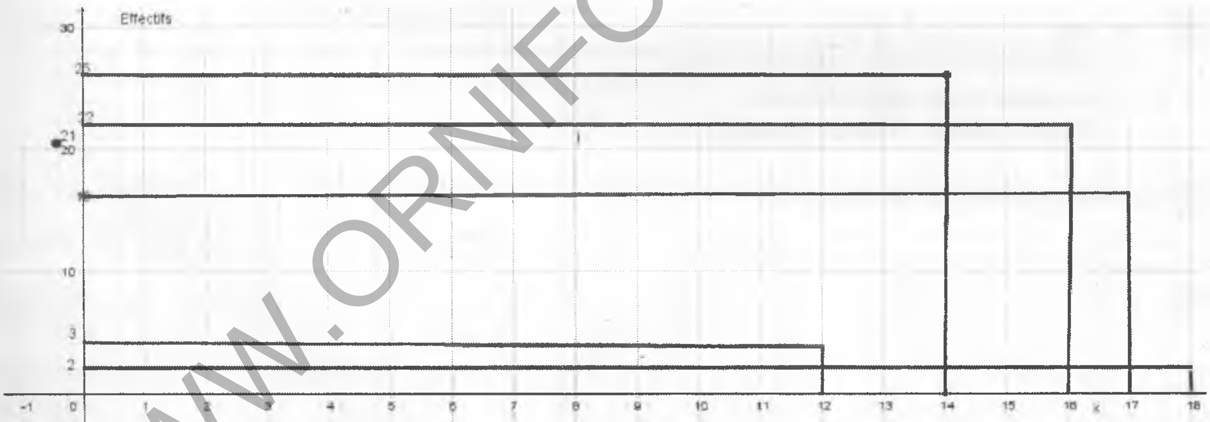
Exercice 01

1. Vérifions que $(x+1)(2x+3) = 2x^2+5x+3$. $(x+1)(2x+3) = 2x^2+3x+2x+3 = 2x^2+5x+3$. D'où l'égalité $(x+1)(2x+3) = 2x^2+5x+3$.
2. Déduisons-en une factorisation de : $A(x)$. $A(x) = 2x^2+5x+3-(2x+3)(4x-2) = (x+1)(2x+3)-(2x+3)(4x-2) = (2x+3)[(x+1)-(4x-2)]$
$= (2x+3)(x+1-4x-2) = (2x+3)(x+1-4x+2) = (2x+3)(-3x+3)$.
D'où $A(x) = (2x+3)(-3x+3)\, ou 3(2x+3)(-x+1)$

Exercice 02

On s'est intéressé aux âges de tous les élèves d'une classe de 3[ième]. les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

Ages	12	14	16	17	18
Nombres d'élèves	3	25	22	18	2



1. Calculons l'effectif total des élèves. On a : $3+25+22+18+2 = 70$. L'effectif total des élèves est donc 70.
2. Le mode est 14 car c'est la modalité ayant le plus grand effectif.
3. Représentons cette série dans un diagramme à bâtons.

Exercice 03

1. Ecrivons A et B sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers relatifs. $A = -4\sqrt{3}+\sqrt{48}-\sqrt{27} = -4\sqrt{3}+\sqrt{2^2\times 3}-\sqrt{3^3} = -4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3\sqrt{3} = -3\sqrt{3} ou -\sqrt{27}$
$B = \dfrac{7\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{10\times 2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{10}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{10} ou \sqrt{490}$.
Conclusion : $A = -3\sqrt{3}$; $B = 7\sqrt{10}$.
2. a. Comparons les nombres 3 et $2\sqrt{3}$ en justifiant la réponse. On a $3^2 = 9$; $(2\sqrt{3})^2 = 4\times 3 = 12$. D'où $3^2 < (2\sqrt{3})^2$. Et comme $3 \geq 0, (2\sqrt{3})^2) \geq 0$, on conclut que $3 < 2\sqrt{3}$.

b. Ecrivons le nombre C sous la forme $a+b\sqrt{c}$. $C=\left(3-2\sqrt{3}\right)^2=(3)^2-2(3)(2\sqrt{3})+(2\sqrt{3})^2=$ $9-12\sqrt{3}+12=21-12\sqrt{3}$
D'où $C=21-12\sqrt{3}$.

c. Déduisons-en que $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$. 1[re] méthode : D'après la question 2.a, $\sqrt{21-12\sqrt{3}}\geq 0$ et $2\sqrt{3}-3\geq 0$.
Et comme $\left(2\sqrt{3}-3\right)^2=21-12\sqrt{3}$ et $\left(\sqrt{21-12\sqrt{3}}\right)^2=21-12\sqrt{3}$ alors, on conclut que $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$.
2[ième] méthode : $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}=|2\sqrt{3}-3|=2\sqrt{3}-3$ car $2\sqrt{3}-3>0$.

Activités géométriques.

Exercice 04

1 a. déterminons la mesure de l'angle $\widehat{COB}$. $[BC]$ est une corde du cercle donné ; $\widehat{CAB}$ est un angle aigu inscrit d'angle au centre associé $\widehat{COB}$.
Comme $mes\widehat{CAB}=36^\circ$, ona $mes\widehat{COB}=2mes\widehat{CAB}=2(36^\circ)=72^\circ$.
Conclusion : $mes\widehat{COB}=72^\circ$.

b. Déduisons-en que $mes\widehat{OCB}=mes\widehat{CBO}=54^\circ$. On a B et C sur le cercle de centre O. D'où $OB=OC$. OBC est alors un triangle isocèle en O c'est-à-dire $mes\widehat{OCB}=\widehat{CBO}$.
De plus, $mes\widehat{COB}+mes\widehat{CBO}+mes\widehat{OCB}=180^\circ$, on en déduit que $72^\circ+2mes\widehat{CBO}=180^\circ$.
Ce qui donne $mes\widehat{CBO}=\dfrac{180^\circ-72^\circ}{2}=\dfrac{108^\circ}{2}=54^\circ$.
Conclusion : $mes\widehat{OCB}=mes\widehat{CBO}=54^\circ$.

2 Calculons la mesure de l'angle $\widehat{BED}$. $[BD]$ est une corde du cercle tracé. $\widehat{BED}$ est un angle obtu inscrit dans ce cercle et l'angle associé au centre $\widehat{BOD}$.
D'où $mes\widehat{BED}=180^\circ-\dfrac{mes\widehat{BOD}}{2}$. AN : $mes\widehat{BED}=180^\circ-\dfrac{130^\circ}{2}=180^\circ-65^\circ=115^\circ$.
Conclusion : $mes\widehat{BED}=115^\circ$

Exercice 05

Observe le cône de révolution d'axe $[AC]$ et de génératrice $[CE]$ ci-contre. On pose : $AC=3cm$, $FB=\dfrac{2}{3}cm$ et $BC=1cm$.
On admet que les droites (FB) et AE sont parallèles.

1 a. Montrons que $AE=2cm$. Considérons le triangle CAE et le fait que (BF) est parallèle à (AE) avec B et F respectivement sur les côtés $[CA]$ et $[CE]$.
La propriété de Thales ou plus précisement sa conséquence donne : $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{AE}{BF}$; ainsi, $AE=$ $\dfrac{=}{CA\times BF}CB$. AN : $AE=\dfrac{3\times\frac{2}{3}}{1}=2$.
Conclusion : $AE=2cm=$.

b. Déduisons-en que le volume V de ce cône est $12,56cm^3$. On a $V=\dfrac{1}{3}\pi AE^2\times AC$ avec $(AE)\perp(AC)$. AN : $V=\dfrac{1}{3}\times 3,14\times 2^2\times 3=12,56cm^3$. Conclusion : $V=$ $12,56cm^3$.

c. Calculons CE. Considérons le triangle rectangle CAE en A. La propriété de Pythagore donne : $CE^2=AC^2+AE^2$. AN : $CE^2=3^2+2^2=13$ $\quad CE^2=13, alors CE=\sqrt{13}$.

2 Calculons le volume V_T du tronc de cône de cette coupe. $V_T=$volume du grand cône - volume du petit cône $=V-k^3V$ avec $k=\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{1}{3}$(cœfficient de réduction.)
AN : $V_T=12,56-(\dfrac{1}{3})^3\quad(12,56)=12,56-\dfrac{12,56}{27}=\dfrac{12,56\times 27-12,56}{27}=\dfrac{339,12-12,56}{27}=$ $\dfrac{326,56}{27}=12,09$.
Conclusion : $V_T=12,09cm^3$.

Problème.

1 a. Déterminons les coordonnées des points A et B. On a : $A(3.5)$; $B(8.1)$.

b. Déduisons-en que $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (8-3)\vec{i} + (1-5)\vec{j} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$.

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = (6-3)\vec{i} + (2-5)\vec{j} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ avec $C(6.2)$.

2 a. Justifions que la droite (AB) a pour équation cartésienne : $ax + 5y - 37 = 0$. Soit $M\binom{x}{y}$, un point sur la droite (AB), on a : $\overrightarrow{AM}\binom{x-3}{y-5}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{5}{-4}$ sont colinéaires c'est-à-dire $(x-3)(-4) - (y-5)(5) = 0$. C'est-à-dire $-4x - 5y + 37 = 0$ ou encore $4x + 5y - 37 = 0$.

Conclusion : la droite (AB) a pour équation cartésienne : $4x + 5y - 37 = 0$.

b. Déterminons une équation cartésienne de la droite (AC). Soit $M\ \binom{x}{y}$, un point sur la droite (AC), on a : $\overrightarrow{AM}\binom{x-3}{y-5}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{3}{-3}$ colinéaires c'est-à-dire $(x-3)(-3) - (y-5)(3) = 0$. C'est-à-dire $-3x - 3y + 24 = 0$.

Conclusion : la droite (AC) a donc pour équation cartésienne : $-3x - 3y + 24 = 0$ ou encore $x + y - 8 = 0$.

3 a. Justifions que x et y vérifient le système (S). D'après les données, on a : $\begin{cases} 4000\times +5000y = & 37000 \\ x + y - 8 = & 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} 4x + 5y - 37 = & 0 \\ x + y - 8 = & 0 \end{cases}$

b. Déduisons-en par lecture graphique, le nombre x de cassiers de jus et le nombre y de cassiers de bière achetés. D'après les questions $3.a$ et $2, (x, y)$ sont des coordonnées du point d'intersection A des droites (AB) et (AC). D'où $(x, y) = (3, 5)$. Conclusion : 3 cassiers de jus et 5 cassiers de bières ont été achetés.

c. Retrouvons les résultats en résolvant le système(S).

$\begin{cases} 4x + 5y - 37 = & 0 \\ x + y - 8 = & 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 4x + 5y - 37 = & 0 \\ y = & 8 - x \end{cases}$ On remplace y par son expression : $\begin{cases} 4x + 5(8-x) - 37 = & 0 \\ y = & 8 - x \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} -x + 40 = & 37 \\ y = & 8 - x \end{cases}$ C'est-à-dire $\begin{cases} x = & 3 \\ y = & 5 \end{cases}$ Ce qui donne bel et bien le résultat précedent