MINSEC
Collège P. Elisabeth Nkwamegni
BP : 7362 Douala, Tél : 677 851 628

Année scolaire 2017/2018
Département de Mathématiques
Classe : 1^{ere} **C, Coef :**6 **Durée :**$3h$

Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie.

Exercice 1.
(Choisir l'une des deux questions suivantes)(Systèmes linéaires)[2.5pts]

1. x,y et z sont les longueurs des arêtes d'un parallélipipède rectangle.(l'unité est le mètre) du système

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-8} - |y| + 3\sqrt{z} = 0 \\ \dfrac{4}{x^2-8} - 2|y| + 3\sqrt{z} = -4 \\ \dfrac{49}{x^2-8} - 7|y| + 3\sqrt{z} = 6 \end{cases}$$

   (a) Donner les différentes contraintes permettant l'existence de (S). $[0^{75}\text{pt}]$
   (b) Déterminer le ou les triplet(s) (x, y, z) solution(s) du système (S). [1pt]
   (c) En déduire les longueurs des arêtes de ce parallélipipède et calculer son volume. $[0^{75}\text{pt}]$

2. $m \in \mathbb{R}$, on se propose de résoudre le système paramétrique $\Sigma_m : \begin{cases} x + my - z = -1 \\ -mx + (1-m^2)y + 2mz = 2m \\ -mx + m(1-m)y + (m+1)z = 2m \end{cases}$
   (a) Résoudre le système Σ_m pour $m = -1$. $[0^{75}\text{pt}]$
   (b) Pour $m \neq -1$, montrer à l'aide du principe du Pivot de Gauss que Σ_m est équivalent au système suivant : $\begin{cases} x + my - z = -1 \\ y + mz = m \\ (m^2-1)z = m(m-1) \end{cases}$ [1pt]
   (c) En déduire la résoluttion du système Σ_m suivant les valeurs du paramètre m. $[0^{75}\text{pt}]$

Exercice 2.
(Equations du 2^{nd} degré, trigonométrie)[4.5pts]

1. (a) Calculer $(1+\sqrt{2})^2$, puis Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - (-1+\sqrt{2})x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$ $[0^{25}\text{pt}+0^{75}\text{pt}]$
   (b) En déduire les solutions dans $[0; 2\pi[$ de l'équation $2\cos^2 x - (-1+\sqrt{2})\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$ $[0^{75}\text{pt}]$
   (c) Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation. $[0^{75}\text{pt}]$
2. En remarquant que $\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\pi}{8}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. $[0^{5}\text{pt}]$
3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos x + \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin x$
   (a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{8})$. $[0^{5}\text{pt}]$
   (b) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $f(x) = 1$. $[0^{5}\text{pt}]$
   (c) Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation. $[0^{5}\text{pt}]$

Problème 1.

Ce problème comporte deux parties indépendantes A et B le tout sur 13pts

Partie A
($Barycentre, Lieux géométriques$).[8pts]

I. ABC est un triangle rectangle en A telque $BC = 2a$ $(a > 0)$. G est le barycentre du système des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$ et $(C, -1)$. I est le milieu de $[BC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{0}$ $[0^{5}\text{pt}]$
2. Soient M un point du plan et (Γ) l'ensemble des points M tel que $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$.
   (a) Vérifier que $A \in (\Gamma)$. $[0^{25}\text{pt}]$
   (b) Montrer que $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2$. $[0^{5}\text{pt}]$
   (c) Déterminer l'ensemble (Γ) et le construire. $(GB^2 + GC^2 = 2GI^2 + \frac{1}{2}BC^2)$ [1pt]

3. Soient N un point quelconque du plan et $\vec{u} = 2\vec{NA} - \vec{NB} - \vec{NC}$.
   (a) Montrer que $\vec{u}$ est indépendant du point N, puis exprimer $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{AI}$. $[0^{75}pt]$
   (b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points N telque : $2NA^2 - NB^2 - NC^2 = 8a^2$. $[0^{75}pt]$

II. $DEFH$ est un parallélogramme et P est le milieu de $[DE]$. Les droites (HE) et (FP) se coupe au point J.

1. (a) Réalise une figure . $[0^5pt]$
   (b) Démontrer que J est le centre de gravité du triangle DEF et en déduire que :
   $\vec{JD} + \vec{JE} + \vec{JF} = \vec{0}$. $[0^{75}pt]$
2. (a) Construire K barycentre du système de points pondérés $(D,1)$,$(E,1)$ et $(F,-1)$. $[0^5pt]$
   (b) Montrer que K est le barycentre du système $\{(J,3),(F,-2)\}$. $[0^5pt]$
3. (a) Montrer que D est barycentre du système de points pondérés $(H,1)$,$(J,3)$ et $(F,-2)$. $[0^5pt]$
   (b) En déduire que D est le milieu du segment $[HK]$. $[0^5pt]$
4. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{G}$ des points M du plan tel que :
   $\|\vec{MH} + 3\vec{MJ} - 2\vec{MF}\| = \|\vec{MD} + \vec{ME}\|$. [1pt]

Partie B

(Fonction) [5pts]

1. f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definies par $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
   (a) Déterminer D_f, D_g, $g \circ f$ et $D_{g\circ f}$. [1pt]
   (b) Determiner $f \circ g$. Que remarque-t-on ? $[0^5pt]$
2. On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 - 4x + 3$.
   (a) Ecrire $h(x)$ sous la forme canonique. $[0^{25}pt]$
   (b) Demontrer que pour tout $x \in [2;5]$, $-1 \leq h(x) \leq 8$. $[0^5pt]$
   (c) Construire sur $[-3;3]$, la courbe de la fonction : $x \longmapsto x^2$. $[0^{75}pt]$
   (d) Construire la courbe de h à partir de celle d'équation $y = x^2$. [1pt]
3. On ci-dessous la représentation graphique de la fonction P et de la droite (D) d'équation $y = 3$
   (a) Résoudre graphiquement l'équation $P(x) = 3$. $[0^5pt]$
   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $P(x) > 3$. $[0^5pt]$