TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES

CLASSES : Tle C,D, E

1. 1. Exercice1 Rangements

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à *n* personnes (*n* 2). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?

2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de *r* places (i.e. séparés par *r* − 1 personnes) ?.

1. 2. Exercice 2 Calcul d'événements 1

Soient *A* et *B* deux événements tels que $P\ A\ \ \frac{1}{5}$ **et** $P\ A\ \ B\ \ \frac{1}{2}$**.**

1. Supposons que *A* et *B* soient incompatibles. Calculer $P\ B$ **.**

2. Supposons que *A* et *B* soient indépendants. Calculer $P\ B$ **.**

3. Calculer $P\ B$ **en supposant que l'événement *A* ne peut être réalisé que si l'événement *B* est réalisé.**

1. 3. Exercice 3. Calcul d'événements 2

1. Montrer que, pour 3 événements quelconques *A*, *B*, *C*, on a :

$$P\ A\ \ B\ \ C\ \ \ P\ A\ \ \ P\ B\ \ \ P\ C\ \ \ P\ A\ \ B\ \ \ P\ B\ \ C\ \ \ P\ C\ \ A\ \ \ P\ A\ \ B\ \ C\ .$$

2. Généraliser dans le cas de *n* événements $A_1, A_2, ..., A_n$**.**

1. 4. Exercice 4 Calcul d'événements 3

Soient *A*, *B* et *C* des événements. On pose $E_1\ \ A\ \ \bar{B}\ \ \bar{C}$ **et** $E_2\ \ A\ \ \ B\ \ C$ **.**

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1\ \ E_2$**.**

3. On sait que $P\ A\ \ 0{,}6$**,** $P\ B\ \ 0{,}4$**,** $P\ C\ \ 0{,}3$**,** $P\ B\ \ C\ \ 0{,}1$**,** $P\ A\ \ C\ \ 0{,}1$**,** $P\ A\ \ B\ \ 0{,}2$ **et** $P\ A\ \ B\ \ C\ \ 0{,}05$**. Calculer** $P\ E_1$ **et** $P\ E_2$ **.**

1. 5. Exercice 5 Dés pipés

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.

2. le premier résultat est 6.

1. 6. Exercice 6 Pièces d'or

Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?

2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

1. 7. Exercice 7 Agriculteur pas écolo

Un agriculteur a entreposé dans un local humide 12 doses d'herbicides et 8 doses de fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes ne sont pas différentiables (parce qu'illisibles).

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard (écologiquement totalement incorrect…).

a. Quelle est la probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide ?

b. Quelle est la probabilité qu'il prenne au moins 2 doses d'herbicide ?

1. 8. Exercice 8. Boules

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculez la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.

b. Deux boules de couleurs différentes.

1. 9. Exercice 9 Jeux

Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que

- **1182 jouent à la loterie (A)**
- **310 vont au casino (B)**
- **190 jouent autant à la loterie qu'au casino.**

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

1. 10. Exercice 10 Conformité 1

D'après les données recueillies jusqu'à ce jour, 2 % de la production d'une unité d'une entreprise est non conforme et ne peut être commercialisée.

a. Quelle est la probabilité que 2 pièces choisies au hasard de la production de cette unité soient non conformes ?

b. Quelle est la probabilité que la première pièce soit non conforme et que la seconde soit conforme

1. 11. exercice 11 Fumeurs

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

b. Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

exercice 12

1. 12. Conformité 2

On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25 % pour X, 35 % pour Y, 40 % pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont :

5 % pour les microprocesseurs de X, 4 % pour ceux de Y et 2 % pour ceux de Z.

Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme ?

b. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type X ?

1. 13. exercice 13 Chiens chats

On sait que 36 % des foyers ont un chien et que dans 22 % des foyers où l'on a un chien on trouve aussi un chat. On sait par ailleurs que 30% des foyers ont un chat.

a. Quelle est la proportion de foyers dans lesquels on trouve un chien et un chat ?

b. Quelle est la probabilité qu'un foyer possède un chien sachant qu'il possède un chat ?

1. 14. exercice 14 Maladie

Dans une population, un sujet a une probabilité de 0,3 d'être atteint d'une maladie M.

On sait que si un sujet n'est pas atteint de M, il a 9 chances sur 10 de répondre négativement à un test T et que s'il est atteint de M, il a 8 chances sur 10 de répondre positivement à T.

On fait le test.

a. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit malade ?

b. Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

1.15. Exercice 15

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de trois sortes :

4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu. Si le bulletin est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 : Le jeu est

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable.

Question 2 : le joueur joue quatre parties indépendamment les unes des autres. La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\frac{216}{625}$ **B :** $\frac{544}{625}$ **C :** $\frac{2}{5}$ **.**

Lors d'un second jeu le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\frac{4}{15}$ **B :** $\frac{11}{30}$ **C :** $\frac{11}{15}$ **.**

1.16. Exercice 16. Vrai ou faux ?

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

*** N l'événement : « le dé tiré est normal » ;**

*** U l'événement : « on obtient 1 au premier lancer » ;**

*** pour *n* entier non nul, S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des *n* premiers lancers ».**

a. On a : $P\ U\ \ \frac{2}{9}$.

b. Pour tout entier *n* non nul, on a : $P\ S_n\ \ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\ \ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour *n* entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des *n* premiers lancers.

c. Pour tout entier *n* non nul, on a : $p_n\ \ \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n\ \ 1}$.

d. On a : $\lim_{n}\ p_n\ \ 0.$

<u>1. 15.</u> Exercice17 vrai ou faux

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

une boule numérotée 0,

une boule numérotée 1,

2^1 boules numérotées 2,

2^2 boules numérotées 3,

……………………………….

2^{k-1} boules numérotées *k* (*k* entier compris entre 1 et *n*),

……………………………….

2^{n-1} boules numérotées *n*.

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note *X* la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a. L'urne contient $2^n \quad 1$ **boules.**

b. Pour tout entier naturel *k* tel que $1 \quad k \quad n$ **, on a :** $P(X \quad k) \quad 2^{n \ k \ 1}$**.**

c. On a pour $n \quad 2$ **:** $\sum_{k \ 1}^{n} k2^{k \ 1} \quad (n \quad 1)2^n \quad 1$**.**

d. On a : $E(X) \quad (n \quad 1)2^n \quad 1$**.**

1. 16. Exercice 18 vrai ou faux ?

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et *n* boules noires ; l'urne V contient *n* boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par *U* l'événement : « on choisit l'urne U », par *V* l'événement : « on choisit l'urne V » et par *B* l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a. On a : $\mathrm{P} \quad B \quad U \quad \dfrac{2}{(n \quad 2)(n \quad 1)}$**.**

b. On a : $P(B) \quad \dfrac{n^2 \quad n \quad 2}{(n \quad 2)(n \quad 1)}$**.**

c. $P(U / B) \quad \dfrac{2}{n^2 \quad n \quad 2}$**.**

d. Pour que $P(U / B) \quad 0{,}1$**, il suffit que** $n \quad 4$**.**

1. 17. EXERCICE 19 VRAI OU FAUX ?

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. On effectue *n* tirages successifs d'une boule avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle *p* la probabilité associée à cette expérience. On définit de plus les événements suivants :

*** On appelle A_n l'événement : « Les *n* − 1 tirages ont donné la même boule et la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est différente des précédentes » ;**

*** Lorsque *k* est un entier compris entre 1 et *n*, on appelle B_k, V_k et R_k les événements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du $k^{\text{ième}}$ tirage.**

a. $p(B_1 \quad \overline{B}_2) \quad 1 \quad p(V_1 \quad \overline{V}_2) \quad p(R_1 \quad \overline{R}_2)$**.**

b. $p(A_2) \quad \dfrac{2}{3}$**.**

c. Pour tout entier $n \quad 2$ **, on a :** $p(A_n) \quad \frac{2}{3^{n \ 1}}$ **.**

d. $\lim\limits_{n} \quad p(A_2) \quad p(A_3) \quad ... \quad p(A_n) \quad \frac{1}{3}$ **.**

EXERCICE 20

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que *p*(R) = 0,15.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit *x* un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne *x* euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par *G* la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire *G* prend donc les valeurs 2*x*, *x*−1 et – 4.

1. Déterminer la loi de probabilité de *G*.

2. Exprimer l'espérance E(*G*) de la variable aléatoire *G* en fonction de *x*.

3. Pour quelles valeurs de *x* a-t-on E(*G*) > 0 ?

EXERCICE 21

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

*** si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;**

*** si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.**

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\bar{E}$. La probabilité d'un événement est notée *p*(E).
Partie A

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre partie de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

*** chaque joueur paye 1 euro par partie ;**

*** si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;**

*** si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.**

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si E(X) < 0. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre *n* de jetons noirs (*n* entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier *n* le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

1. 18. EXERCICE 22 Lancer dés+binomiale

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

***D*$_1$: « le dé indique 1 »,** **D*$_2$: « le dé indique 2 »,**

***D*$_3$: « le dé indique 3 »,** ***G* : « la partie est gagnée ».**

***A* et *B* étant deux évènements tels que $p(A) \quad 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de *B* sachant que *A* est réalisé.**

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$.

b. Montrer alors que $p(G) \quad \frac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

<u>EXERCICE 23</u>

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U$_1$, U$_2$ et U$_3$ contenant chacune *k* boules, où *k* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U$_1$, deux boules noires dans U$_2$ et une boule noire dans U$_3$. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé,

*** s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U$_1$, note sa couleur et la remet dans U$_1$;**

*** s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U$_2$, note sa couleur et la remet dans U$_2$;**

*** si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U$_3$, note sa couleur et la remet dans U$_3$.**

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ». **B : « Le dé amène un multiple de 3 ».**

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$ **.**

d. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$ **.**

2. Dans cette question, *k* est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$ **. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à** 10^{-3} **près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.**

<u>EXERCICE 24 :Boules</u>

5 points, énoncé légèrement modifié.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».
Montrer que $p(A_0)\ \frac{6}{15}$ **et** $p(A_1)\ \frac{8}{15}$ **; en déduire** $p(A_2)$ **.**

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».
a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$ **,** $p_{A_1}(B_0)$ **,** $p_{A_2}(B_0)$ **.**

b. Calculer $p(B_0)$ **.**
c. Calculer $p(B_1)$ **et** $p(B_2)$ **.**

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)\ \frac{1}{3}$ **.**

EXERCICE 25

<u>1. 19. Boules et urnes</u>

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient *n* boules blanches et 3 boules noires (*n* est un nombre entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble des ces opérations constitue une épreuve.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. On considère l'événement A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".

2. a. Démontrer que la probabilité *p*(A) de l'événement A peut s'écrire : $p(\mathrm{A}) \quad \frac{3}{4}\left(\frac{n \quad 2}{n \quad 3}\right)$

2. b. Déterminer la limite de *p*(A) lorsque *n* tend vers .

3. On considère l'événement B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche".

Calculer *p*(B).

4. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches dans U_2.

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2*n* francs ;

- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit *n* francs ;

- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

4. a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que *n* ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère *n* > 10, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, X = 2*n* – 20).

4.b. Déterminer la loi de probabilité de X.

4.c. Calculer l'espérance mathématique de X.

4.d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 26

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit *x* un entier tel que $0 \quad x \quad 10$. On place maintenant *x* boules blanches et 10 − *x* boules noires dans l'urne A et les 10 − *x* boules blanches et *x* boules noires restantes dans l'urne B.

On procède à l'expérience E : on tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question on prend *x* = 6. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à : $\frac{1}{55} \quad x^2 \quad 10x \quad 5$.

c. Pour quelles valeurs de *x* l'évènement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{\mathrm{M}}$?

<u>EXERCICE 27 Urnes</u>

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.

1. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2 .

a. Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)

b. On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.

c. On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.

2. On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.

***X* est la variable aléatoire qui prend pour valeur *k* si le premier jeton blanc apparaît au *k*-ième tirage.**

Donner la loi de probabilité de *X*, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

1. 20. Exercices 28 : Boules et suite

Une urne contient *n* boules blanches ($n \quad 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 5 boules noires ?

2. Déterminer la limite de p_n lorsque *n* tend vers .

1. 21. Exercice 29 : Exercice de base : Efficacité d'un test (probabilité conditionnelle)

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

1. 22. Exercice 30 :Urne

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté *a*, porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.

On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne, et on note *b* le numéro du jeton tiré.

On note G l'événement : "La partie est gagnée", lorsque la somme des numéros *a* et *b* est égale à 5.

1. Montrer que la probabilité de gagner est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes *A* et *B* jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la question 1.

Si *A* gagne et *B* perd, *A* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, si *A* perd et *B* gagne, *B* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier *n*, on désigne les événements suivants :

> **A_n : "*A* gagne la nième partie".**
>
> **B_n : "*B* gagne la nième partie".**
>
> **C_n : "Le jeu continue après la nième partie."**

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fontion de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) \quad \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

c. Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n) \quad \frac{3}{16} \quad \left(\frac{5}{8}\right)^{n \quad 1}$

d. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers + .

e le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

1. 23. Exercice 31 : Jetons

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- **4 jetons blancs marqués 0 ;**
- **3 jetons rouges marqués 7 ;**
- **2 jetons blancs marqués 2 ;**
- **1 jeton rouge marqué 5.**

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles.

2. On considère que tous les tirages sont équiprobables et on considère les événements suivants :

A : "Les 4 numéros sont identiques."

B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."

C : "Tous les jetons sont blancs."

D : "Tous les jetons sont de la même couleur."

E : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."

a. Calculer la probabilité de B

b. Calculer la probabilité des événements A, C, D et E.

c. On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

3. On établit la règle du jeu suivante :

Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 f

Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 f

Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 f

Pour tous les autres tirages, il perd 5f

G est la variable aléatoire égale au gain du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

1. 24. Exercice 32 : Contrôle de qualité,

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par *a* et *b*. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10 % le défaut *b*.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut *a* » ;

B : « la montre tirée présente le défaut *b* » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.

2. Calculer la probabilité de l'évènement D.

3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts *a* et *b*. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

1. 25. Exercice 33 :Erreurs d'impression

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. a. Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément *n* de l'ensemble {1, 2, 3}, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les *n* premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4.
On admet que, pour chaque élément *n* de l'ensemble {0, 1, 2, 3}, $P(E_n) = 32 \times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

a. Calculer la probabilité *P*(E_4). Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».
b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P_{E_0}(C)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ? En déduire la probabilité $P(C \cap E_0)$.

c. Déterminer de même $P_{E_n}(C)$ puis $P(C \cap E_n)$ pour tout élément *n* de l'ensemble {1, 2, 3, 4}.

En déduire *P*(C).

d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

1. 26. exercice 34 : Clefs et portes,

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.

Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clef numéro *x* la clef utilisée au *x*-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \quad D_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'événement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \quad i \quad j \quad 5$, on note (*i* ; *j*) l'événement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros *i* et *j* », et *P*(*i* ; *j*) la probabilité de cet évènement.

a. Calculer *P*(2 ; 4).

b. Calculer *P*(4 ; 5).

1. 27. Exercice 35 : Boules,

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

b. On appelle *X* la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de *X*.

Calculer l'espérance mathématique de *X*.

2. Soit *k* un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi *k* tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de *k* pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 36 :

1. 28. Boules et fonction

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

> ***A* « Les trois boules sont rouges. »**
>
> ***B* « Les trois boules sont de lamême couleur. »**
>
> ***C* « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »**

a. Calculer les probabilités *p*(*A*), *p*(*B*) et *p*(*C*).

b. On appelle *X* la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de *X*. Calculer *E*(*X*).

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par *n* boules rouges où *n* est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc *n* + 5 boules, c'est-à-dire, *n* rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

> ***D* « Tirer deux boules rouges. »**
>
> ***E* « Tirer deux boules de la même couleur. »**

a. Montrer que la probabilité de l'événement *D* est $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. Calculer la probabilité *p*(*E*) de l'évènement *E* en fonction de *n*.

Pour quelles valeurs de *n* a-t-on $p(E)\geq\frac{1}{2}$ **?**

1. 29. Exercice 37 : Jetons+VA,

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

> **4 jetons blancs marqués 0 ;**
> **3 jetons rouges marqués 7 ;**
> **2 jetons blancs marqués 2 ;**
> **1 jeton rouge marqué 5.**

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

> ***A* : « Les quatre numéros sont identiques ».**
> ***B* : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».**

C **: « Tous les jetons sont blancs ».**

D **: « Tous les jetons sont de lamême couleur ».**

E **: « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».**

a. Montrer que la probabilité de l'évènement *B* est $\frac{4}{105}$**.**

b. Calculer la probabilité des évènements *A*, *C*, *D*, *E*.

c. On suppose que l'évènement *C* est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement *B*.

3. On établit la règle de jeu suivante :

− Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.

− Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.

− Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.

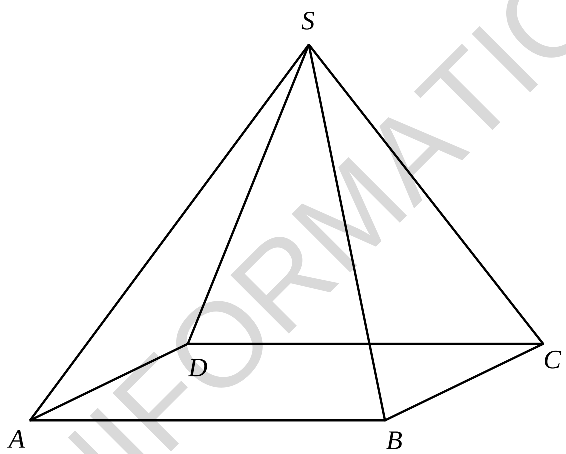
− Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.

− Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G **est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.**

Établir la loi de probabilité de *G* et calculer l'espérance mathématique de *G*.

1. 30. Exercice 38 :Fourmis markoviennes



1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.

Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- **en A ?**
- **en B ?**
- **en C ?**
- **en D ?**

b. Pour tout nombre entier naturel *n* strictement positif, on note S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après *n* pas » et p_n la probabilité de cet évènement. Donner p_1.

En remarquant que $S_{n\ 1} \quad S_{n\ 1} \quad S_n$**, montrer que** $p_{n\ 1} \quad \frac{1}{3}\ 1 \quad p_n$ **.**

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$ **.**

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$**.**

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ **.**

1. 1. Exercices 39 :AU DELA DU PROIGRAMME Durée de vie+binom.

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec λ > 0.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ **.**

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3. Pour la suite de l'exercice, on prendra λ = 0,2.

2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

EXERCICES NON CORRIGES

2. EXERCICE 40 :Rappels et exercices de base

2. 1. QCM

1. A et B sont deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,2 et p(B) = 0,3 alors p(A $\cup$ B) =….

a. 0,06	**b. 0,44**	**c. 0,5**	**d. 0,56**

2. A et B sont deux évènements. p(A $\cap$ $\bar{B}$) = ……

a. p(A) – p(A $\cup$ B)	**b. p(B) – p(A $\cap$ B)**	**c. p($\bar{B}$) – p(A $\cap$ B)**	**d. p(A) – p(A $\cap$ $\bar{B}$)**

3. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement et sans remises 2 boules de l'urne. La probabilité de l'événement : « la 2$^{\text{ième}}$ boule tirée est noire sachant que la première l'est aussi » est égale à ….

a. $\frac{5}{4}$	b. $\frac{25}{64}$	c. $\frac{5}{14}$	d. $\frac{4}{7}$

4. Lors d'une course de chevaux comportant 20 partants, la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre est combien de fois supérieure à la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

a. 10 fois	**b. 6 fois**	**c. 5 fois**	**d. 3 fois**

5. Dans un tiroir il y a 3 paires de chaussettes de couleurs différentes, on tire au hasard 2 chaussettes ; la probabilité qu'elles appartiennent à la même paire est égale à ….

a. $\frac{1}{3}$	b. $\frac{1}{5}$	c. $\frac{1}{6}$	d. $\frac{1}{2}$

6. Une seule de ces 4 affirmations est fausse laquelle ?

a. Deux évènements incompatibles ne sont pas nécessairement indépendants	**b. Si p(A) 0 alors $p_A(A)=1$**	**c. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité d'obtenir les 4 as dans une main de 5 cartes est inférieure à un dix millième.**	**d. Que l'on joue au loto ou pas, la probabilité de gagner le gros lot est identique au millionième près**

7. On considère l'épreuve qui consiste à lancer un dé non truqué. On gagne 20 € si on obtient le 6, on perd 4 € sinon. L'espérance de gain pour ce jeu est ….

a. Impossible à déterminer	**b. Négative**	**c. Positive**	**d. Nulle**

8. On choisit au hasard une boule d'une urne contenant 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3, deux boules vertes numérotées 1 et 2 et une boule bleue numérotée 1. On considère les évènements suivants :

R : «La boule tirée est rouge » ; A : « la boule tirée est numérotée 1 » ; B : « la boule tirée est numérotée 2 ».

Laquelle de ces 4 affirmations est vraie ?

a. Il n'y a pas d'évènements indépendants	**b. R et A sont indépendants**	**c. A et B sont indépendants**	**d. R et B sont indépendants**

9. En considérant une année de 365 jours, la probabilité pour que dans un groupe de 23 personnes choisies au hasard, 2 personnes au moins aient la même date anniversaire est……

a. Inférieure à 0,5	b. Egale à 0,5	c. Supérieure à 0,5	d. Proche de 0,003

10. Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM. La probabilité qu'il obtienne la moyenne est environ égale à ….

a. 0,003	b. 0,058	c. 0,078	d. 0,0035

2. 2. EXERCICE 41 :Boules+VA+répétition,

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Calculer $P(X = 0)$.

c. On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

– Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

– En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

Soit k un entier compris entre 1 et n.

Soit N l'évènement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».

Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».

Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages ».

Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$.

2. 3. EXERCICE 42 :Boules+VA

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs <u>avec remise de chaque boule après tirage</u>. On arrête le tirage après l'obtention d'une boule blanche.

1. On limite le nombre de tirages à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention de la première boule blanche. Si on n'a pas tiré de boule blanche après le 4ème tirage on prend X = 0.

a. Calculer la probabilité *p*(X = 0).

b. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

2. On procède maintenant à *n* tirages au maximum, *n* > 1. X est la v.a. définie comme précédemment, si on n'a pas tiré de boule blanche après les *n* tirages on prend X = 0.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

Montrez que $\mathrm{E(X)} \quad \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$ **où *f* est la fonction définie par :** $f(x) \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \quad 4x^3 \quad \ldots \quad nx^{n \; 1}$**.**

b. On considère la fonction g définie par $g(x) \quad 1 \quad x \quad x^2 \quad \ldots \quad x^n$**. Montrez par récurrence que** $g(x) \quad \frac{1 \quad x^{n \; 1}}{1 \quad x}$**.**
Calculez *g'*(*x*) en utilisant les deux formes, déduisez-en une autre expression de *f*(*x*). Calculez alors E(X).

c. Déterminez la limite de E(X) quand *n* tend vers . Interprétez.

2. 4. EXERCICE 43 : Boules+suite,

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève *n* successivement et avec remise, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les événements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire que $p(A \quad B) \quad \frac{n}{2^n}$ **,** $p(A) \quad 1 \quad \frac{1}{2^{n \; 1}}$ **,** $p(B) \quad \frac{n \quad 1}{2^n}$**.**

2. Montrer que $p(A \quad B) \quad p(A) \quad p(B)$ **si et seulement si** $2^{n \; 1} \quad n \quad 1$**.**

3. Soit (u_n **) la suite définie par** $u_n \quad 2^{n \; 1} \quad (n \quad 1)$**, *n* > 1. Calculer** u_2 **,** u_3 **,** u_4 **.**

Montrer que u_n **est strictement croissante. En déduire la valeur de l'entier *n* tel que les événements A et B soient indépendants.**

2. 5. EXERCICE 44 :Boules et urnes

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

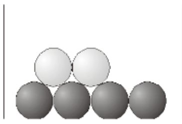
c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

2. 6. EXERCICE 45 : Boules sans ou avec remise



Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 4 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.

2. On effectue 4 tirages successifs d'une boule, sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

3. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

c. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche au cours des quatre tirages.

d. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

4. On effectue n tirages successifs, avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir, au cours de ces n tirages, une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a. Calculer P_1, P_2, P_3.

b. Conjecturer P_n.

2. 7. EXERCICE 46 :Urnes, boules, tirages,

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires. On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : « Les trois boules tirées sont rouges. »

D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »

B : « La boule tirée de l'urne U_2 est rouge ».

a. Calculer la probabilité de l'événement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible.

2. 8. EXERCICE 48 : Code d'entrée

Le code d'entrée d'un immeuble est composé de 5 symboles parmi les chiffres de 0 à 9 et les lettres A et B. Un même symbole peut être utilisé plusieurs fois.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?

3. Combien de codes contiennent un et un seul 0 ?

4. Combien de codes contiennent au moins une lettre ?

5. Un nouveau syndic est nommé, qui décide que pour des raisons de sécurité, le code doit comporter au moins un chiffre et au moins une lettre. Combien y a-t-il dorénavant de codes possibles ?

6. Un SDF veut dormir dans le hall. Il sait par une indiscrétion que le code comporte les chiffres 1258 et la lettre B. Combien de codes devra-t-il essayer au maximum avant de passer la nuit au chaud ?

2. 9. EXERCICE 49 : Avec de la géométrie,

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement −1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro *x* et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro *y* et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro *z* et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;i\,,j\,,k)$ le point *M* de coordonnées (*x*, *y*, *z*).

Sur le graphique joint en annexe, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions

possibles du point *M*. Les coordonnées du point A sont (1 ; −1 ; −1) dans le repère $(O\,;i\,,j\,,k)$.

On note *C* le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point *M* soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.

2. On note E_1 l'évènement : « *M* appartient à l'axe des abscisses ». Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.

3. Soit *P* le plan passant par *O* et orthogonal au vecteur n (1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan *P* .

b. Tracer en couleur sur le graphique la section du plan *P* et du cube *C*. (On ne demande pas de justification).

c. On note E_2 l'évènement : « *M* appartient à *P* ». Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?

4. On désigne par *B* la boule de centre :O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points *M* de l'espace tels que O*M* 1,5).

On note E_3 l'évènement : « *M* appartient à la boule *B* ». Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.