



EXAMEN BLANC N°1	CLASSE : T^{le}D	DUREE : 4H	COEF. : 4
-------------------------	---------------------------------	-------------------	------------------

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 : 4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}; \vec{v})$, unité 2cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c avec

$$a = -1 + i\sqrt{3}; \quad b = -1 - i\sqrt{3} \text{ etc} = 2$$

- 1) Placer ces points dans le repère. (on complètera au fur et à mesure la figure). 0.5pt
- 2) a) Vérifier que $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. 0.75pt
- b) En déduire la nature du triangle ABC. 0.5pt
- 3) Etablir que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z vérifiant $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe $\omega = -2$, dont on précisera le rayon. Construire (Γ) . 0.75 pt
- 4) On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r ? 0.5pt
- b) Construire le point tel que $D = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(C)$, puis calculer son affixe. 0.5 pt
- c) Déterminer l'image du cercle (Γ) par la rotation r . 0.5pt

Exercice 2 /05points

I. On considère les trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}; \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \text{ et } w_n = v_n - u_n. \end{cases}$$

- 1- Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. 1 pt
- 2- Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) . 0.5 pt
- 3- Soit la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
- a) Démontrer que (t_n) est constante. 0.5 pt
- b) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) . 0.5 pt

II- On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = b(x)$, où $b: x \mapsto b(x)$ est une fonction continue sur \mathbb{R} . Désignons par F une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-2x}b(x)$.

- 1) Montrer que la fonction $h: t \mapsto e^{2t}F(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y' - 2y = b(x)$. 0.25 pt
- 2) Montrer que une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - h$ est solution d'une équation différentielle $(E_0): y' - 2y = 0$. 0.5 pt
- 3) Résoudre (E_0) , puis (E) . 0.25ptx 2
- 4) Linéariser la fonction $g: x \mapsto \sin^4(x)$. 0.5 pt
- 5) Déterminer la solution h_0 de l'équation différentielle $(E'): y' - 2y = e^{2x}\sin^4(x)$ qui s'annule en 0 . 0.75pt

PROBLEME (11 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités 2cm en abscisses et 4cm en ordonnées). On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ et $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) celle de g .

Partie A / Etude de g

- 1- Déterminer le domaine de définition de g . 0.5pt
- 2- Préciser le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$. 0.75pt
- 3- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α . 0.5pt
- 4- Calculer $g(1)$ et $g(2)$; puis trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} . 1pt
- 5- Etudier le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$. 0.5pt

Partie B / Etude de f

- 1- a) Déterminer le domaine de définition de f . **0.5pt**
 b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats. **1pt**
- 2-a) Montrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = 2 \left[\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} \right] g(x)$. **0.5pt**
 b) Dresser le tableau de variation de f . **0.75pt**
- 3- Montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$. **0.5pt**
- 4- Construire (C) dans un repère orthogonal en prenant pour unités 2cm en abscisses et 4cm en ordonnées (On prendra $\alpha = 1.85$) **1pt**

Partie C / Encadrement d'une aire

- Soit A l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=1$, $x=\frac{3}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe de f
- 1- Ecrire A à l'aide d'une intégrale **0.5pt**
- 2- On pose $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$. **0.5pt**
 a) Calculer I **0.5pt**
 b) En utilisant une intégration par parties, calculer J **0.75pt**
- 3- On pose $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$
- a) Montrer que pour tout $x \geq 1$; $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ **0.5pt**
 b) En déduire un encadrement de K. **0.5pt**
- 4-a) Exprimer A en fonction de K. **0.25pt**
 b) En déduire un encadrement de A en cm^2 **0.5pt**