

**EVALUATION DE LA DEUXIEME SEQUENCE**

Classe:	TERMINALE	Série:	C	Année	2017 - 2018
Epreuve:	MATHEMATIQUES	Coef:	5	Durée:	4 heures

**Exercice 1: 4. 25pts**

Alain dit à Paul : « *Mon âge divise deux fois ton âge plus 17* » et Paul répond : « *oui, le mien divise le tien plus quatre* ». Alain et Paul ont chacun au moins un an.

On notera par  $x$  l'âge de Alain et  $y$  celui de Paul ( $x > 1$  et  $y > 1$ ).

- 1) Justifier que  $(x ; y)$  est solution de :  $\begin{cases} 2y - nx = -17 \\ x - my = -4 \end{cases}$   $n$  et  $m$  sont des entiers naturels
- 2)a) Montrer que le PGCD de  $x$  et  $y$  est soit 1, soit 17 **0.25pt**  
 b) Montrer que le PGCD de  $x$  et  $y$  est soit 1, soit 2, soit 4. **0.25pt**  
 c) En déduire que  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux. **0.25pt**
- 3) Montrer que  $n$  et  $x$  sont des nombres impairs, puis que  $m$  et  $y$  sont impairs. **1pt**
- 4) a) Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $m$  et  $n$ . **0.5pt**  
 b) En déduire que  $x$  est un diviseur de  $17m + 8$  **0.25pt**  
 c) Etant donné que  $y > 1$ , montrer que  $m < 4 + \frac{19}{n}$  **0.25pt**  
 d) En déduire que  $m$  ne peut prendre que des valeurs impaires comprises entre 1 et 21. **0.5pt**
- 5) Sachant que  $x$  est un diviseur de  $17m+8$  et que  $x - my = -4$ , examiner toutes les valeurs possibles de  $m$  puis en déduire que ce problème a cinq solutions que vous préciserez. **1pt**

**Exercice 2: 5pts**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(3 ; -2 ; 2)$ ,  $B(6 ; 1 ; 5)$  et  $C(6 ; -2 ; -1)$ .

- 1) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle. **0.5 pt**
- 2) Soit (P) le plan d'équation cartésienne  $x + y + z - 3 = 0$ . Montrer que (P) est orthogonal à la droite (AB) et passe par A. **0.5 pt**
- 3) Soit (P') le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par A. Déterminer une équation cartésienne (P'). **0.5 pt**
- 4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (P'). **0.5 pt**
- 5) Soit I le milieu de [BC], calculer la distance de I à (D). **0.5 pt**
- 6) a) Soit  $D(0 ; 4 ; -1)$ . Montrer que (AD) est perpendiculaire au plan (ABC). **0.5 pt**  
 b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0.5 pt**  
 c) Montrer que l'angle géométrique  $\widehat{BDC}$  a pour mesure  $\frac{\pi}{4}$ . **0.5 pt**  
 d) Calculer DB et DC; puis l'aire du triangle BDC. **1 pt**

**Exercice: 4pts**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = z^2 - 4z$

- 1) Soient A et B les points d'affixes respectives  $z_A = 1 - i$  et  $z_B = 3 + i$
- a) Calculer les affixes des points A' et B' images de A et B par f **0.5pt**
- b) Démontrer que si deux points distincts ont la même image par f, alors l'un est le symétrique de l'autre par rapport à un point que l'on précisera **0.5pt**
- 2) Soit I le point d'affixe  $z_I = -3$
- a) Démontrer que OMIM' est un parallélogramme ssi  $z^2 - 3z + 3 = 0$  **0.5pt**
- b) Résoudre dans C l'équation  $z^2 - 3z + 3 = 0$  **0.5pt**
- 3) a) Exprimer  $(z' + 4)$  en fonction de  $(z - 2)$  **0.5pt**
- b) Dédurre une relation entre  $|z' + 4|$  et  $|z - 2|$ , puis entre  $\arg(z' + 4)$  et  $\arg(z - 2)$
- 4) On considère les points J et K d'affixes respectives  $z_J = 2$  et  $z_K = -4$ .  
Démontrer que si le point M est sur le cercle de centre J et de rayon 2 alors son image M' est sur un cercle que l'on déterminera **0.5pt**
- 5) Soit E le point d'affixe  $z_E = -4 - 3i$
- a) Donner la forme trigonométrique de  $(z_E + 4)$  **0.5pt**
- b) A l'aide de 3.a., démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est E **0.5pt**

**PROBLEME: 6.7 5pts**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2 cm). D désigne l'intervalle  $]1; +\infty[$ . f est la fonction définie sur D par :  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ .

**Partie A :**

- 1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D **0.5 pt**
- b) Montrer la dérivée de f garde un signe constant sur D. **0.5 pt**
- c) Justifier f est une bijection de D vers un ensemble à déterminer. **0.25pt**
- d) Dresser le tableau de variation de f **0.5pt**
- d) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left] \frac{3}{2}; 2 \right[$  **0.5pt**
- 2) Déterminer les branches infinies à (C) et Construire (C) **1pt**

**Partie B :**

On considère l'intervalle  $I = \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$  et la fonction g définie sur I par  $g(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2}$

- 1) a) Préciser le sens de variations de g. **0.5pt**
- b) Montrer que  $g(I) \subset I$  **0.25pt**
- c) Démontrer que  $g(\alpha) = \alpha$  **0.5pt**
- d) Montrer que  $\forall x \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[; |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$  **0.5pt**
- 2) On définit la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = 2$  et pour tout entier n ;  $U_{n+1} = g(U_n)$
- a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de IN,  $U_n \in I$  **0.5pt**
- b) Démontrer que pour tout entier n de IN ;  
 $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$  **0.75pt**
- c) Démontrer que pour tout entier n de IN ;  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  **0.5pt**