LYCEE DE BANGOULAP
Département de mathématiques
Année scolaire 2017 - 2018

Classe : Tle C  Séquence :2
Durée : 4h  Coef : **5**
Examinateur : M. DJOUTSOP

# Epreuve de Mathématiques

**Exercice 01 :** **(04,5 points)**

A)

1) Décomposer 18360 puis déterminer tous les entiers dont le cube divise 18360 — 0,5 pt
2) Déterminer alors n entier naturel tel que $n^3[n^2 + (n+1)^2] = 18360$ — 0.5pt
3) Trouver l'entier m tel que $\overline{442003}^m = 36723$ — 0,5 pt
4) Déterminer les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $\begin{cases} ppmc(x,y) = 8160 \\ pgcd(x,y) = 5 \\ x > y \end{cases}$ — 0,75 pt

B) On propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ suivante $z^4+3z^3+\frac{9}{2}z^2+3z+1=0$. On pose

$P(z)=z^4+3z^3+\frac{9}{2}z^2+3z+1$.

1. a) Montrer que $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$. — 0,25 pt

   b) Montrer que si $z_0$ est solution de $(E)$, alors il en est de même de $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$. — 1 pt

2. Vérifier que $-1+i$ est une solution de $(E)$ et en déduire alors toues les autres solutions de $(E)$. — 1 pt

**Exercice 02** **(07 points)**

A) ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=a$ et $AC=2a$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$.

1. a) Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. — 0,75 pt
   b) Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC. — 1 pt
2. A tout point M du plan, on associe le nombre réel $f(M)=3MA^2-2MB^2+MC^2$.
1. a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a. — 0,5 pt
   b) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)$ des points M du plan tels que $f(M)=2a^2$. — 0,5 pt
3. A tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel $h(M)=3MA^2-2MB^2-MC^2$
   a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{U}$ non nul tel que $h(M)=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{U}-2a^2$. — 0,75 pt
   b) On désigne par $(\Delta)$ l'ensemble des points M du plan tels que $h(M)=-2a^2$. — 0,5 pt
4. $(\Delta)$ et $(\Gamma)$ sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux. — 1 pt

B) L'espace est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les points $A(1;1;0);\ B(1;2;1)$ et $C(-1;2;3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont coplanaires. — 0,75 pt
2. Calcule l'aire du triangle ABC. — 0,25 pt
3. Soit $(P)$ le plan d'équation $2x-y+z=0$ et $(\Delta)$ la droite orthogonale à $(P)$ passant par O. Déterminer une équation paramétrique de $(\Delta)$. — 0,5 pt

**Problème** **(08,5 points)**

Les fonctions $f_m(x)$ *et* $g$ sont des fonctions numériques d'une variable réelle définies respectivement définies par $f_m(x)=\sqrt{x^2+x-2}-mx$ *et* $g_m(x)=\dfrac{f_m(x)}{x-2}$.

1. a) Déterminer le domaine de définition $D_{f_m}$ *de* $f_m(x)$ . 0,5 pt

   b) Déterminer la valeur de m pour laquelle g est prolongeable par continuité en 2 puis déterminer le prolongement G de g. 0,5pt

2. Calculer suivant les valeurs de m la limite de $f_m(x)$ quand $x\,tend\,vers+\infty$. 0,75 pt

3. Dans la suite, on suppose que m=0 et on pose $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$ et $(C_f)$ est la courbe de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

   a) Montrer que $(C_f)$ admet deux demi-tangentes en deux points à préciser. 1 pt

   b) Montrer que la droite d'équation $2x-2y+1=0$ est l'une des deux asymptotes à $(C_f)$ puis déterminer l'autre. 1 pt

   c) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $D_f$. 0,5 pt

4. $h$ est la fonction définie sur IR par $h(x)=\sqrt{|x^2+x-2|}$.

   a) Montrer que la courbe de $h$ est la réunion de $(C_f)$ et d'un arc de cercle dont on déterminera le centre et le rayon. 1 pt

   b) Construire la courbe de $h$. 1 pt

5. Déterminer les images par $h$ des intervalles suivants : $a)$ $I=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $b)$ $J=[-1;1]$. 0,5 pt

6. a) Montrer que l'équation $h(x)=1+\sqrt{x}$ admet dans $I=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ une solution $\alpha$. 0,75 pt

   b) Montrer que pour tout $x\in I,\ |h'(x)|\leq\frac{3}{\sqrt{5}}$. 0,5 pt

   c) Montrer que pour tout $x\in I,\ \left|\sqrt{-x^2-x+2}-1-\sqrt{\alpha}\right|\leq\frac{3}{\sqrt{5}}|x-\alpha|$. 0,5 pt

« Par M. DJOUTSOP Emile »