WWW.ORNIFORMATION.COM

LYCEE CLASSIQUE DE KEKEM	EVALUATION DE LA PREMIERE SEQUENCE	Prof : M. **NANA NGONGANG** (PLEG Maths-Pures)
Classe : **T^{le} C**	Epreuve de **Mathématiques**	Année Scolaire : **2017-2018**
Coeff: **5** Durée**: 3 heures**		Date : Mercredi 04 Octobre 2017

Instructions : *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision de raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation des calculatrices scientifiques et du matériel de géométrie (règle, équerre,……) est autorisée.*

EXERCICE 1 : 03 points *Q.C.M.*

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

1- Le nombre complexe $(1+i)^{72}$est égal à :
a) 272 **b)** $6,9\times 10^{10}$ **c)** 236 **d)** 0

2- L'écriture exponentielle de $z=\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *est*:
a) $\frac{15}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ **b)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **c)** $\frac{15}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **d)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

3- Le nombre complexe $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ a pour argument :
a)$-\frac{\pi}{6}$; **b)** $\frac{\pi}{6}$ **c)** $\frac{5\pi}{6}$ **d)** $-\frac{5\pi}{6}$

4- On considère les points $A(1-2i), B(1+3i)$ et $C(2-i)$ l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme est :
a) $2-6i$ **b)** $2+4i$ **c)** $4i$ **d)** 5

5- On considère les points $A(2+i)$ et $B(2-4i)$ dans un repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, le triangle OAB est :
a) Equilatéral **b)** Isocèle **c)** Rectangle **d)** Quelconque

6- On considère un point M du plan complexe d'affixe z. Déterminer l'ensemble auquel appartient M quand z vérifie : $|z-1+i|=|z+2i|$. On considère A et B les points d'affixes $1-i$ et $-2i$.
a) Le cercle de centre $\Omega(1-i)$ et de rayon 2. **c)** La médiatrice de $[AB]$
b) Le milieu de $[AB]$. **d)** L'ensemble vide.

EXERCICE 2: 04,5 points *Systèmes de numération, Récurrence.*

A-

1- Les entiers naturels $\overline{34}^a$, $\overline{13}^a$, $\overline{1102}^a$ sont écrits dans la base a, a étant un entier naturel supérieur ou égal à 5. Trouver a sachant que $\overline{34}^a\times\overline{13}^a=\overline{1102}^a$. ***[0,75 pt]***

2- Soit b un entier naturel et X un nombre qui s'écrit $\overline{1335}^b$ dans la base b.
a) Donner son écriture dans la base $(b+1)$. ***[0,75pt]***
b) Déterminer b sachant que ce nombre écrit dans la base dix est inférieur ou égal à 500. ***[0,5 pt]***

B- Critère de divisibilité par 7

Soit un entier naturel n. On décompose n de la façon suivante : $n=10a+b$ avec $0\le b<9$: Les coefficients a et b correspondent respectivement au nombre de dizaines et au chiffre des unités de l'entier n.

1- Montrer que $10a-21b+b\equiv 10a+b[7]$: ***[0,5 pt]***

2- En déduire que n est divisible par 7 si et seulement si, $a-2b$ est divisible par 7. ***[0,5 pt]***

3- En déduire, sans utiliser une calculatrice que 574 et 861 sont des multiples de 7 . ***[0,5 pt]***

C- On considère la somme des cubes de n premiers entiers naturels impairs :
$S_n=\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^3$. Démontrez par récurrence que $\forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*$ *on a*: $S_n=2n^4-n^2$. ***[1pt]***

WWW.ORNIFORMATION.COM

EXERCICE 3 : 03 points *Equations, PGCD.*

A- On se propose de résoudre l'équation (E) : $3x^2 - 7y^2 = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1- On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie (E) : $3x^2 - 7y^2 = 4$. Démontrer que $y^2 \equiv 2[3]$. **[0,75 pt]**

2- Soit n un entier relatif, quelles sont les restes possibles de la division de n^2 par 3 ? **[0,25 pt]**

3- Quel est l'ensemble solution de l'équation (E) ? **[0,75 pt]**

B- 1- Deux nombres a et b sont premiers entre eux et leur somme est 24. Déterminer tous les couples (a, b) possibles. **[0,5 pt]**

2- Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels $x + y = 96$ et $pgcd(x ; y) = 4$ **[0,75 pt]**

PROBLEME: 09,5 points

Les parties A B et C sont indépendantes.

PARTIE A: 2 points *Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe.*

On se propose de déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $a = -7 - 24i$

1- Vérifier que $a = (1 + 2i)^4$. **[0,5 pt]**

2- Justifier que si z est une racine quatrième de a, alors $\left(\frac{z}{1+2i}\right)^4 = 1$ **[0,5 pt]**

3- Utiliser les racines quatrièmes de 1 pour déterminer sous la forme algébrique les racines quatrièmes de a **[1 pt]**

PARTIE B: 04 points *Equations dans* $\mathbb{C}$

On se propose dans cet exercice de calculer des valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$

1- Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$;

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$. **[0,5 pt]**

2- En utilisant la valeur $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :

$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0$ **[1 pt]**

3- Démontrer que : $\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2$ et que : $\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ **[1 pt]**

4- En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée. **[1,5 pt]**

PARTIE C: 03,5 points *Nombres complexes et géométrie.*

Le plan complexe (P) étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on note A, B et C les points d'affixes respectives 1, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On considère l'application t de (P) dans (P) qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 + 1$

1- a) Déterminer les images par t des points O, B et C. **[0,75 pt]**

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par t. **[0,75 pt]**

2- a) Montrer que $AM' = OM^2$ **[0,5 pt]**

b) On suppose que le point M est distinct de O et on appelle α une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right)$.

Montrer que $\alpha \equiv 2.\arg z\ [2\pi]$ **[0,5 pt]**

3- Lorsque le point M n'appartient pas à la droite (OA), justifier que le programme de construction suivant permet d'obtenir le point M': **[1 pt]**

- Construire la demi-droite $[AT)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$; tel que $mes\ (\vec{u}, \overrightarrow{e_1}) \equiv 2mes\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.
- Placer le point P de coordonnées $(2 ; 0)$.
- Placer les points Q et R tels que $AQ = OM$ et $Q\epsilon[AP)$, $AR = OM$ et $R\epsilon[AT)$.
- Construire la parallèle (Δ) à (PR) passant par Q.

M' est le point d'intersection de la demi-droite $[AT)$ et de la droite (Δ).

WWW.ORNIFORMATION.COM

WWW.ORNIFORMATION.COM