Corrigé de *Mathématiques*
$\mathcal{BEPC}-$ 2012

Activités numériques.

Exercice 01

[1] Ecrivons X sous la forme de fraction irréductible

On a successivement : $X = \dfrac{2^7 \times 3^6 \times 5^3}{81 \times 2^8 \times 53} = \dfrac{2^7 \times 3^6}{3^4 \times 2^8} = \dfrac{3^2}{2^1} \Longrightarrow X = \dfrac{9}{2}$

Autre méthode :

On a successivement : $X = \dfrac{2^7 \times 3^6 \times 5^3}{81 \times 2^8 \times 53} = \dfrac{128 \times 729 \times 125}{81 \times 256 \times 125} = \dfrac{93312}{20736} = \dfrac{9}{2}$.

[2] Trouvons deux entiers consécutifs α et β tels que : $\alpha < x < \beta$.

$X = \dfrac{9}{2} = 4,5$;. $4 < X < 5$; $\alpha = 4$; $\beta = 5$

Exercice 02

[1] $S_3 = \{(500, 450)\}$ est l'ensemble solution du système.

[2] Calcul du prix d'un cahier et celui d'un bloc-notes.

Soit x=le prix d'un cahier et soit y=le prix d'un bloc-notes. Puisqu'on a 7 cahiers et 3 bloc-notes à $4850f$. alors $7x + 3y = 4850$. or 2 cahiers et 3 bloc-notes à $2350f$: $2x + 3y = 2350$

D'où le système (S) $\begin{cases} 7x + 3y = & 4850 \\ 2x + 3y = & 2350 \end{cases}$ c'est-à-dire à résoudre le système $\begin{cases} 7x + 3y = & 4850 \\ 4x + 6y = & 4700 \end{cases}$

En se référant à la question précédente, on trouve $x = 500$ et $y = 450$.

Donc le prix d'un cahier est $500Frs$ et le prix d'un bloc-notes est $450Frs$.

Exercice 03

[1] Calculons : $a^2 = \left(3 + \sqrt{7})^2\right) = 9 + 6\sqrt{7} + 7 = 16 + 6\sqrt{7}$ $\qquad a^2 = 16 + 6\sqrt{7}$.

$b^2 = \left(-3 + \sqrt{7}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{7} + 7 = 16 - 6\sqrt{7}$ $\qquad b^2 = 16 - 6\sqrt{7}$.

$ab = \left(3 + \sqrt{7}\right)\left(-3 + \sqrt{7}\right) = -9 + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 7 = -2$ $\qquad ab = -2$.

[2] Montrons que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ est un entier relatif négatif.

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$. AN : $\dfrac{a^2 + b^2}{ab} = \dfrac{\left(16 + 6\sqrt{7}\right) + \left(16 - 6\sqrt{7}\right)}{-2} = \dfrac{32}{-2} = -16$ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = -16$ et -16 est bel et bien un entier négatif.

[3] Donnons un encadrement de Y sachant que $2,6457 < \sqrt{7} < 2,66458$,

$Y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2 - b^2}{ab}$. AN : $\dfrac{\left(16 + 6\sqrt{7}\right) - \left(16 - 6\sqrt{7}\right)}{-2} = \dfrac{12\sqrt{7}}{-2} = -6\sqrt{7}$

Puisque $2,6457 < \sqrt{7} < 2,66458$, alors $-6(2,6457) < -6\sqrt{7} < -6(2,66458)$. Donc, $-15,8748 < Y < -15,8742$.

[4] La bonne réponse est $c.\ 3 - \sqrt{7}$.

Activités géométriques .

Exercice 04

Répondre par vrai ou faux aux propositions

$\boxed{1}$ vrai
$\boxed{2}$ vrai

Exercice 05

$\boxed{1}$ Déterminons AC pour que le triangle ABC soit rectangle en A . Si ABC est rectangle en A, alors la propriété directe de Pythagore nous permet d'écrire : $BC^2 = AB^2 + AC \longrightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$. AN : $AC = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = 40$. $AC = 40cm$

$\boxed{2}$ Calculons : $\cos \hat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{30}{50} = 0,6$; $\sin \hat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{40}{50} = 0.8$ $\cos \hat{B} = 0,6$; $\sin \hat{B} = 0,8$.

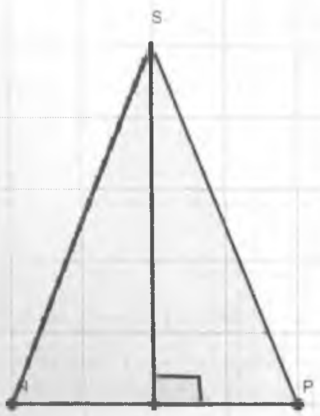
$\boxed{3}$ Déterminons à 1^o près par excès la mesure de l'angle $\hat{B}$ A l'aide d'une calculatrice, on obtient à partir de la valeur de $\cos \hat{B}$ ou du $\sin \hat{B}$ que $\hat{B} = 53,130102354156$. Alors une valeur approchée à 1^o près par excès la mesure de l'angle est $B = 54^{\circ}$.

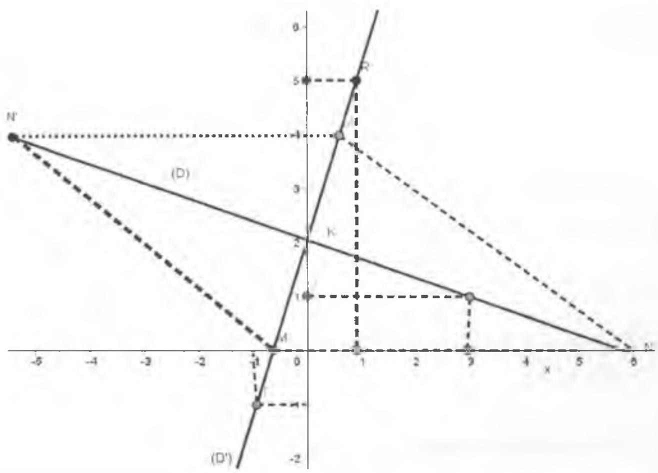
Exercice 06

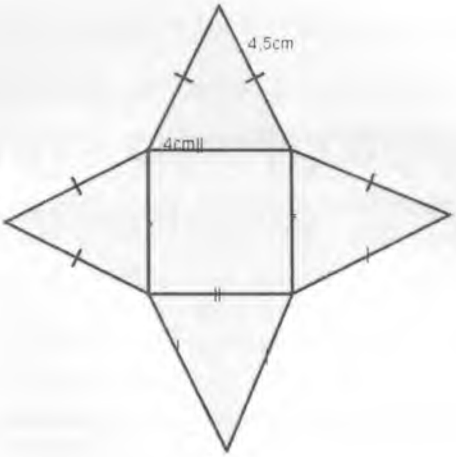
$\boxed{1}$ Montrons que la mesure d'une arête latérale de cette pyramide est égale à $9cm$. Le triangle SON(ou l'un des triangles SOM, SOP, SOQ) est rectangle en O. la propriété directe de Pytagore permet d'écrire : $SN^2 = OS^2 + ON^2$. Dans le carré $MNPQ$, on a :
$ON = \dfrac{diagonale}{2} = \dfrac{\text{côté du carré} \times \sqrt{2}}{2}$ AN : $ON = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.
Ainsi. $SN^2 = OS^2 + ON^2 = 81 \longrightarrow SN = 9cm$.

$\boxed{2}$ Représentons le patron.

$\boxed{3}$ Calcul de la mesure de la hauteur issue de S de la face latérale SNP. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet S : $[SH]$ est donc la hauteur.
Le triangle SNH est rectangle en H. La propriété directe de Pythagore permet d'écrire : $SN^2 = HS^2 + HN^2 \longrightarrow SH^2 = NS^2$ - HN^2 AN : $SH^2 = 9^2$ - $4^2 = 65$ $SH = \sqrt{65}cm \approx 8,0622577482986 \cdots cm$.







Probleme.

1 Plaçons les points R et T dans un repère orthonormé (O, I, J).

a. Déterminons une équation cartésienne de la droite (RT).

Soit $M(x,y)$ un point du plan. Dire que M est un point de la droite (RT) signifie que les vecteurs $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{TM}\,(x+1, y+1)$ et $\overrightarrow{RT}\,(-2,-6)$. On doit avoir : $(-6)(x+1)$ - $(-2)(y+1) = 0$ c'est-à-dire : $-6x-6+2y+2=0$

C'est-à-dire $-6x+2y-4=0$; donc $3x-y+2=0$ ou $y=3x+2$ est l'équation cartésienne de la droite (RT).

2 Traçons dans un même repère les droites (D) et (D')

X	0	3
Y	2	1

X	0	-1
Y	2	-1

Trouvons les points de (D) : $y=-\frac{1}{3}W+2$

Trouvons les points de (D') : $y=3x+2$

3 a. Déterminons les coordonnées du point d'intersection.

- Point d'intersection de (RT) avec l'axe des abscisses. Soit la droite (RT) d'équation $3x-y+2=0$. Pour $y=0$ alors $x=-\frac{2}{3}$

  Donc le point d'intersection de (RT) avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

- Point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses. Soit la droite (D) d'équation $y=-\frac{1}{3}X+2$ Pour $y=0$ alors $x=6$.

  Donc le point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(6,0)$.

b. Montrons que $k(0,2)$ est le point d'intersection des droites (RT) et (D). Vérifions que k est un point de (RT).

Soit la droite (RT) d'équation $3x-y+2=0$ par ailleurs, $3(0)-2+2=0$ alors, k appartient à la droite (RT).

Vérifions que k est un point de (D).

Soit la droite (D) d'équation $y=-\frac{1}{3}X+2$. En effet, $-\frac{1}{3}(0)+2=2$ alors, k appartient à la droite (D).

Par ailleurs, $(RT)\neq(D)$ car, d'après la question 3,a) ces deux droites n'ont pas un même point d'intersection avec l'axe des abscisses. Donc $k(0,2)$ est le point d'intersection de (RT) et de (D)

c. Démontrons que le triangle KMN est rectangle en k. Soient $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KN}=(-6,-2)$.

Effet. $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\end{pmatrix}(6)+(-2)(-2)=-4+4=0$. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{KM} et \overrightarrow{KN}$ sont colinéaires doc le triangle KMN est rectangle en k.

4 a. Montrons que le quadrilatère $MNM'N'$ est un losange. M' est le symétrique de M par rapport au point K, K est le milieu de $[MM']$

N' est le symétrique de M par rapport au point K . K est le milieu de $[NN']$

Le quadrilatère $MNM'N'$ a ses diagonales $[MM']$ et $[NN']$ qui se coupent en leur milieu K. $MNM'N'$ est donc un parallélogramme Par ailleurs, il résulte de la question 3-c) que (MM') et (NN') sont perpendiculaires en K. on déduit que $MMM'N'$ est un losange.

b. Calculons l'aire du losange $MNM'N'$. Soit A l'aire en cm^2 du losange on a :

$$A=\frac{grandediagonale \times petitediagonale}{2}=\frac{2NK\times 2MK}{2}=NK\times MK.$$

AN : $NK=\sqrt{(0-6)^2+(2-0)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$; AN : $MK=\sqrt{\left(0+\frac{2}{3})\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+4}=\frac{\sqrt{40}}{3}$

AN : $A=2\times\sqrt{40}\times\frac{\sqrt{40}}{3}=\frac{80}{3}cm^2=26,66cm^2$ $A=\frac{80}{3}cm^2$ $=26,66cm^2$.