LYCÉE BILINGUE DE BANGANG **ANNÉE SCOLAIRE 2017-2018**

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉVALUATION DE LA DEUXIÈME SÉQUENCE

Classe : $T^{le}C$ Coef : **5** Durée : **4h** Examinateur : **Takam Takougoum Clovis-C**

Exercice 1 : $3pts$

A) Soit n un entier naturel non nul. f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1) Montrer que la dérivée d'ordre n sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction f est $f^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n}{x^{n+1}}$. $0.75pt$

2) Montrer que pour tout entier naturel m, $10^{2m} \equiv 1[9]$. $0.5pt$

B) On considère l'équation $(E) : 13x + 7y = 16$.

1) Déterminer une solution particulière de (E). $0.25pt$

2) Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers tel que $13x + 7y = 16$. $0.5pt$

3) En déduire dans $\mathbb{Z}$, les solutions du système :

$$\begin{cases} x \equiv -5[7] \\ x \equiv 11[13] \end{cases}$$

$0.5pt$

Exercice 2 : $5pts$

A) On considère g une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x+1}$.

1) Déterminer les dérivées première et seconde de g sur $[0; +\infty[$. $0.5pt$

2) Montrer que $\forall x \in [0; 1]; \dfrac{\sqrt{2}}{4} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$. $0.75pt$

3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur $[0; x]$;
démontrer que $\dfrac{\sqrt{2}}{4}x \leq g(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x$ avec $x \in]0; 1[$. $0.75pt$

B) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme Q défini par : $Q(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1$.

1) Montrer que $Q(\overline{z}) = \overline{Q(z)}$ et en déduire que si z_0 est une solution l'équation $Q(z) = 0$,
alors $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont aussi des solutions de cette équation. $1pt$

2) Montrer que $-1 + i$ est une solution de l'équation $Q(z) = 0$. 0.75

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$. $1.25pt$

Problème : $12pts$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.
On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Le but de ce problème l'étudier de la fonction f.

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire $3.5pts$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation. $1pt$

2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. $0.75pt$

3) Justifier que $\alpha \in [2;3]$, et utiliser la méthode de dichotomie pour déterminer la valeur de α à 10^{-21} près. $1pt$

4) Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$. $0.75pt$

<u>Partie B</u> : Étude de la fonction f $6.5pts$

1) Déterminer le domaine de définition de f. $0.25pt$

2-a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. $1pt$

b) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$. $0.5pt$

c) Déterminer d'autres asymptotes (si existe) de (C_f). $0.5pt$

3-a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ et déterminer le signe de f'. $1pt$

b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1}$. $0.5pt$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f. $0.5pt$

4) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à son asymptote oblique. $0.5pt$

5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 2$. $0.5pt$

6) Tracer la courbe de la fonction f, ses asymptotes la tangente (T). $1.25pt$

<u>Partie C</u> : $2pts$

Soit l'intervalle $I =]-\infty; -1[$.

1) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. $1pt$

2) Résoudre sur I l'équation $f(x) = 0$. $0.5pt$

3) Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur I. $0.5pt$

<u>Bonne chance</u>