Ministère des Enseignements Secondaires

Collège de la Retraite

Examen : **Baccalauréat Blanc**

Série : **D** Session : **2019**

Épreuve : **Mathématiques**

Durée : **4H** Coefficient : **4**

Cette épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème étalés sur deux pages.

EXERCICE 1 : 4points

Les fonctions logistiques sont utilisées en économie, en biologie et en psychologie pour décrire l'évolution d'une population à « croissance limitée ».

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{10}{1+e^{-x}}$. Une population de lapins est introduite dans une petite île. On appelle $f(x)$ la population en milliers de lapins en fin d'année de rang x. $f(0)$ est le nombre de millions de lapins présents sur l'île en fin 2000, $f(1)$ le nombre de millions de lapins en fin 2001, $f(-1)$ le nombre de millions de lapins en fin 1999,...L'accroissement de la population est non seulement proportionnel à la quantité de lapins mais aussi à l'écart théorique entre le nombre maximal m de lapins et la population actuelle.

1. Calculer la dériveé de f et montrer qu'on a : $f'(x)=\frac{1}{10}f(x)\left[10-f(x)\right]$. **0.75pt**
2. Dresser le tableau de variation de f. **0.75pt**
3. Montrer que A(0 ; 5) est un centre de symétrie de la courbe de f et tracer la courbe . **1pt**
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=9$. **0.5pt**
5. a) Quel était le nombre de lapins présents sur l'île en 1998 ? **0.25pt**
   b) Déterminer en quelle année 9 millions de lapins seront présents sur île. **0.25pt**
   c) Sachant que le modèle est pertinent, calculer le nombre maximal m de lapins. **0.5pt**

EXERCICE 2 : 5points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. S est la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+\frac{1}{2}(5-i)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-z^2-(5+4i)z-12i+21=0$ sachant qu'elle admet une unique solution réelle. **1.5pt**
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S. **0.75pt**
3. On considère les points A, B, C, E d'affixes respectives *3+2i ; -3 ; 1-2i* et *5-4i.*
   a) Faire une figure claire à compléter au fur et à mesure **0.5pt**
   b) Vérifier que *S(B)= C.* Quelle est la nature du triangle ABC ? **0.5pt**
   c) Déterminer l'affixe du point D image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 2. **0.5pt**
   d) Démontrer que le quadrilatère ABDE est un carré. **0.75pt**
4. *(C)* désigne le cercle de centre C passant par A. *(C)* coupe l'axe réel en deux points K et L, l'affixe de K étant positive. Démontrer que le triangle KCL est isocèle en C. **0.5pt**

PROBLÈME : 11 points

On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ pour $x>0$ et $f(0)=\frac{1}{2}$.

On munit le plan du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 1cm. (C) est la courbe de f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire et étude de f

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

1. a) Étudier le sens de variation de g **0,5pt**

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et dresser le tableau de variation de g. **0,75pt**

   c) En déduire le signe de g(x) pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$. **0,25pt**

   d) Montrer que pour tout x de $[2,3]$, $g(x)<\frac{1}{2}$. **0,5pt**

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ et démontrer que f est continue en 0. **0,75pt**

   b) La fonction f est dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat. **0.75pt**

   c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2$ et en déduire la limite de f en $+\infty$. **0,75pt**

   d) Montrer que f est une primitive de g sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f. **1pt**

3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C). **0.5pt**

   b) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C), la droite (D) et la droite (Δ) : $y=x$. **1pt**

Partie B : Dans cette partie, On désigne par I l'intervalle sur $[2,3]$.

1. a) Soit h la fonction définie sur I par $h(x)=f(x)-x$. Montrer que $\forall x\in I,\ h'(x)<0$. **0,5pt**

   b) En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution dans I, que l'on notera α. **1pt**

2. Montrer que $\forall x\in I,\ 0\le f'(x)\le\frac{1}{2}$ et en déduire que $\forall x\in I, |f(x)-\alpha|\le\frac{1}{2}|x-\alpha|$. **0.75pt**

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n\in I$.

4. a) Établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ **0,5pt**

   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et que la suite (u_n) converge **1pt**

   c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **0,5pt**