MINESEC/ DRL/DDSM **Série : C/ Seq : 5 /Devoir 10**
Lycée de Ndom **Année 2010/2011**
Département de Mathématiques **Durée :4hrs ; coef : 5**

Epreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1: (Nombres complexes et géométrie): 5points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1cm. On considère la transformation s du plan qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' daffixe z' tel que :

$$z' = -(\sqrt{3}+i)z - 1 + i\,(1+\sqrt{3}).$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. (On notera A le centre de cette transformation) ***0,75pt***

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\,i$. Calculer AM_0. En déduire une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}\,,\overrightarrow{AM_0})$. ***0,75pt***

3. On considère la suite de points $(M_n)n \geq 0$ définie pour tout entier naturel n $f(M_n) = M_{n+1}$. On note par z_n l'affixe du point M_n.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$z_n = 2^n\, e^{in\frac{7\pi}{6}}\,(z_0 - i).$$ ***0,75pt***

b. Pour tout entier naturel, calculer AM_n, puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $AM_n \geq 10^2$. ***0,75pt***

4a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x *et* y sont des entiers naturels. Après avoir vérifier que (-5, -3) est solution, résoudre (E).

b. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $Im(z) = 1$ *et* $Re(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement (Δ) *et* le représenter. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que M_n appartenant à la demi-droite d'origine A dirigé par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément. ***1pt***

Exercice 2 : (Transformations du plan). 4points

Soit f l'application du plan P dans P qui, à tout points M de coordonnées $(x\,,\ y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\,,\ y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}.$$

1. Démontrer que f est involutive. ***0,5pt***
2. Démontrer que l'ensemble des milieux du segment $[M\ M']$ est une droite fixe. ***0,5pt***
3. Soit B le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et B' l'image de B par f.

Démontrer que la famille $\left(\overrightarrow{MM'}\,,\overrightarrow{BB'}\right)$ est liée. ***0,25pt***

Reconnaître la transformation usuelle. ***0,25pt***

4. Soit (H) l'hyperbole d'équation : $y = \frac{\sqrt{2}}{2\,x}$ et (H') l'image de (H) par f.

a. Donner une équation de (H'). ***0,5pt***
b. Construire (H) et (H') sur le même graphique. ***1pt***
c. Donner les équations des asymptotes de (H'). ***0,5pt***
d. Donner l'équation de (H') rapporté à ses asymptotes. ***0,5pt***

Problème : 11points
Partie A : (équations différentielles) 2,5points
Soit à résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = xe^{-x}$ (1)

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$; où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. ***0,5pt***
2. Soient a et b deux réels et soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)\, e^{-x}$.
a. Déterminer a et b pour que $u$soit solution de (1) . ***0,5pt***
b. Montrer que v est solution de (2) si et seulement si $u + v$ solution de (1). ***0,5pt***
c. En déduire l'ensemble de solution de (1). ***0,5pt***

Partie B : 5points (étude d'une fonction auxiliaire)
I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1. Dresser le tableau de variations de g. ***1pt***
2. On suppose que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles.
a. Vérifier que 0 est l'une des solutions. ***0,25pt***
b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$. ***0,5pt***
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. ***0,5pt***
II) (étude de la fonction principale)
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $h(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.
1a. Calculer $h'(x)$ et exprimer $h'(x)$ en fonction de $g(x)$. ***0,5pt***
b. En déduire le tableau de variations de h. ***0,75pt***
2a. Montrer que $h(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $h(\alpha)$. ***1pt***
b. Calculer $\int_m^0 xe^x \, dx$ où m est un réel strictement négatif. ***0,5pt***

Partie C : (Suite définie par une intégrale) 4 points
1) On pose que pour tout entier naturel n, non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1 - x)^n \, e^{-x} \, dx.$$

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1. ***0,5pt***
b. Prouver que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x} \, dx.$$ ***0,75pt***

En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$. ***0,25pt***
c. Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$ ***1pt***

2. On considère la suite $(a_n)n \in \mathbb{N}^*$ définie par a_0=0 et $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.
a. Démontrer que $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. ***1pt***
b. En déduire $\lim_{n\to\infty} a_n$. ***0,5pt***

Le bonheur, c'est savoir ce que l'on veut et le vouloir passionnément.

Moualeu Dany Pascal
Pleg Maths